第11期 2017年11月
电 子 学 报 ACTA ELECTRONICA SINICA
Vol. 45 No. 11 Nov. 2017

# Goguen 公理化扩张系统的 $\Gamma$-$k$ 随机真度理论及性质

惠小静,高晓莉,朱乃调
(延安大学数学与计算机科学学院,陕西延安 716000)

**摘 要:** 本文首先对 $n$ 值 Goguen 命题逻辑进行公理化扩张 Goguen$_{\sim,\Delta}$,记为$\prod_{\sim,\Delta}$. 利用赋值集的随机化方法,给出公式在 $k$($k$ 取 ~ 或 $\Delta$)连接词下相对于局部有限理论 $\Gamma$ 的 $\Gamma$-$k$ 随机真度的定义;讨论了$\prod_{\sim,\Delta}$中 $\Gamma$-$k$ 随机真度的 MP 规则、HS 规则等相关性质;接着,在 $\Gamma$-$k$ 中定义了两公式间的 $\Gamma$-$k$ 随机相似度与 $\Gamma$-$k$ 随机伪距离,得到了公式在连接词下相对于局部有限理论 $\Gamma$ 的 $\Gamma$-$k$ 随机相似度与 $\Gamma$-$k$ 随机伪距离所具有的一些良好性质;最后,在$\prod_{\sim,\Delta}$中介绍了任意理论 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 的相对随机发散度和相对随机相容度概念,得到了相对随机发散度与相对随机相容度之间联系的关系式.

**关键词:** Goguen 命题逻辑系统; $\Gamma$-$k$ 随机真度; $\Gamma$-$k$ 随机相似度; $\Gamma$-$k$ 随机伪距离; 相对随机发散度; 相对随机相容度

**中图分类号:** O141.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)11-2656-07
**电子学报 URL:** http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.11.012

# The Theory and Properties of $\Gamma$-$k$ Randomized Truth Degree on Axiomatic Extension of Goguen Propositional Logic System

HUI Xiao-jing, GAO Xiao-li, ZHU Nai-diao
(*College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an, Shaanxi* 716000, *China*)

**Abstract:** Axiomatic extensions of $n$-valued Goguen propositional logic system is first studied in this paper, which is denoted as $\prod_{\sim,\Delta}$. Using the randomization method of valuation sets, the definition of $\Gamma$-$k$ randomized truth degree of formula relative to local finite theory $\Gamma$ under the $k$ conjunction is given. The MP rule, HS rule, and some related properties are also discussed. Then, the definitions of $\Gamma$-$k$ randomized similarity degree and $\Gamma$-$k$ randomized pseudo-metric in $\prod_{\sim,\Delta}$between two formulas are given, and some desirable properties about $\Gamma$-$k$ randomized similarity degree and $\Gamma$-$k$ randomized pseudo-metric relative to local finite theory $\Gamma$ under conjunction are obtained. Finally, the paper introduces the concepts of randomized relative divergence degree and relative randomized consistency degree of theory $\Gamma$ relative to the fixed theory $\Gamma_0$ in $\prod_{\sim,\Delta}$, and obtains the relationship between relative randomized divergence degree and relative randomized consistency degree.

**Key words:** Goguen propositional logic system; $\Gamma$-$k$ randomized truth degree; $\Gamma$-$k$ randomized similarity degree; $\Gamma$-$k$ randomized pseudo-metric; relative randomized divergence degree; relative randomized consostency degree

## 1 引言

自从 Pavelka 在 20 世纪 70 年代提出命题逻辑程度化的思想以来[1],有众多学者开始投入这一研究领域并取得了丰富的成果[2~5].

然而,在目前广泛受到大家关注的命题逻辑系统中,Gödel 系统和 Goguen 系统中的否定太强以及蕴涵算子的不连续性而使相关研究受到了阻碍. 文献[6,7]引入了基本连接词对合否定 ~. 文献[8,9]引入去模糊化算子 $\Delta$,并提出了基本逻辑系统 BL 的公理化扩张 $BL_{\Delta}$ 系统,同时与对合否定相结合建立了 $SBL_{\sim}$ 系统,在该系统中 $\Delta$ 演绎定理和强完备性定理都成立,从而弥补了 Gödel 和 Goguen 系统的不足,使得在 Gödel 和 Goguen 系统中的研究得以顺利展开. 文献[10]便是在 $SBL_{\sim}$ 系统

收稿日期:2016-06-23;修回日期:2016-12-19;责任编辑:马兰英
基金项目:国家自然科学基金(No. 11471007);陕西省自然科学基金(No. 2014JM1020);延安大学研究生创新基金(No. YCX201612)

中以推理中命题的真值为基础,运用 Δ 转换词建立了推理中前提与结论的真值关系定理,实现了 Δ 模糊逻辑系统的计量化. 而以真度为基础的 $SBL_{\sim}$ 系统中计量化研究目前很少. $Gödel_{\sim,\Delta}$ 和 $Goguen_{\sim,\Delta}$ 系统作为 $SBL_{\sim}$ 系统中的典型代表在其中展开计量化研究有着重要意义.

本文以 Goguen 命题逻辑系统为例,拟在 SBL 公理化扩张中展开计量化研究. 首先在 $n$ 值 Goguen 命题逻辑系统中添加了两类算子,即对合否定和连接词 Δ,将其作为 $SBL_{\sim}$ 系统的公理化扩张,记为 $Goguen_{\sim,\Delta}$ 或 $\Pi_{\sim,\Delta}$. 然后利用赋值集的随机化方法,给出公式在 $k$($k$ 取 ~ 或 Δ)连接词下相对于局部有限理论 Γ 的 Γ-$k$ 随机真度的定义,可以证明,该定义是随机真度以及 Γ 真度的推广,论证了 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中 Γ-$k$ 随机真度的 MP 规则、HS 规则等相关性质;接着,在 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中定义了两公式间的 Γ-$k$ 随机相似度与 Γ-$k$ 随机伪距离,得到了公式在连接词下相对于局部有限理论 Γ 的 Γ-$k$ 随机相似度与 Γ-$k$ 随机伪距离所具有的一些良好性质;最后,在 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中介绍了任意理论 Γ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 的相对随机发散度和相对随机相容度概念,得到了相对随机发散度与相对随机相容度之间的关系式.

## 2　预备知识

**定义 1**[8]　$BL_{\Delta}$ 的公理系统如下:

(BL) BL 的公理系统;

($A\Delta1$) $\Delta A\vee\neg\Delta A$;

($A\Delta2$) $\Delta(A\vee B)\to(\Delta A\vee\Delta B)$;

($A\Delta3$) $\Delta A\to A$;

($A\Delta4$) $\Delta A\to\Delta\Delta A$;

($A\Delta5$) $\Delta(A\to B)\to(\Delta A\to\Delta B)$.

$BL_{\Delta}$ 中的推理规则为 MP 规则和 Δ 规则,MP 规则为从 $A,A\to B$ 推得 $B$,Δ 规则为 $A\to\Delta A$.

如果 $\mathscr{L}$ 是 BL 的公理化扩张,那么把 $\mathscr{L}_{\Delta}$ 记为 $\mathscr{L}$ 的扩张,其方式正如 BL 扩张为 $BL_{\Delta}$ 一样,$BL_{\Delta}$ 系统中以下 Δ 演绎定理成立:

**定理 1**[10](Δ 演绎定理)　令 $\mathscr{L}$ 是 $BL_{\Delta}$ 的公理化扩张,那么对任意理论 Γ,公式 $A$ 和 $B$,有 $\Gamma,A\to B$ 当且仅当 $\Gamma\to\Delta A\to B$.

SBL 是 BL 中增加了公理 $\neg\neg A\vee\neg A$ 之后的公理化扩张. $SBL_{\Delta}$ 也为 SBL 的公理化扩张. $SBL_{\sim}$ 系统是在 SBL 系统中增加了对合否定连接词 ~ 后形成的逻辑系统.

**定义 2**[9]　作为 SBL 的公理化扩张,$SBL_{\sim}$ 的公理系统如下:

(SBL) SBL 的公理系统;

(~1) $\sim\sim A\to A$;

(~2) $\neg A\to\sim A$;

(~3) $\Delta(A\to B)\to\Delta(\sim B\to\sim B)$.

在 $SBL_{\sim}$ 系统中令 $\Delta A=\neg\sim A$,便可以建立 $SBL_{\Delta}$ 系统与 $SBL_{\sim}$ 系统之间的关系. 即 $SBL_{\sim}$ 有如下的等价公理系统:

($SBL_{\Delta}$) $SBL_{\Delta}$ 的公理系统;

(~1) $\sim\sim A\to A$;

(~3) $\Delta(A\to B)\to\Delta(\sim B\to\sim B)$.

$SBL_{\sim}$ 中的推理规则也为 MP 规则和 Δ 规则. 如果 $\mathscr{L}$ 是 SBL 的公理化扩张,那么把 $\mathscr{L}_{\sim}$ 记为 $\mathscr{L}$ 的扩张,其方式正如 SBL 扩张为 $SBL_{\sim}$ 一样,而且 $Gødel_{\sim}$ 和 $\Pi_{\sim}$ 是 $SBL_{\sim}$ 公理化扩张的两个基本类型. 由于 $SBL_{\sim}$ 也是 $BL_{\Delta}$ 的公理化扩张,因此 $SBL_{\sim}$ 中 Δ 演绎定理也成立.

**定理 2**[9](强完备性定理)　令 $\mathscr{L}$ 是 $SBL_{\sim}$ 的公理化扩张,那么对理论 Γ 和公式 $A$,下面条件等价:

(ⅰ) $\Gamma\to A$;

(ⅱ) 对每个 $\mathscr{L}$ 代数和理论 Γ 的每个模型 $e$,均有 $e(A)=1$.

## 3　Γ − $k$ 随机真度的定义及性质

**定义 3**　设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 是可数集,~,Δ 是 $S$ 上的一元运算,∨,∧,→是 $S$ 上的二元运算,$F(S)$ 是由 $S$ 生成的(~,Δ,∨,∧,→)型自由代数,称 $F(S)$ 中的元叫命题或合式公式,称 $S$ 中的元叫原子公式.

**定义 4**　Goguen 命题逻辑系统也叫乘积系统,记为 Π. 设 $\Pi_{\sim,\Delta}=\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$,在 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中规定 $\forall x,y\in\Pi_{\sim,\Delta}$,$\sim x=1-x$,$x\vee y=\max\{x,y\}$,$x\wedge y=\min\{x,y\}$,$\Delta x=\begin{cases}1,x=1\\0,x<1\end{cases}$,$x\to y=\begin{cases}1,x=0\\\frac{y}{x}\wedge1,x>0\end{cases}=\begin{cases}1,x\leqslant y\\\frac{y}{x},x>y\end{cases}$ 称 $Goguen_{\sim,\Delta}$ 是 $n$ 值乘积命题逻辑系统的扩张,简记为 $\Pi_{\sim,\Delta}$.

**注 1**　$\Pi_{\sim,\Delta}$ 作为 $n$ 值乘积系统的公理化扩张,是在 $n$ 值乘积系统的基础上增加了对合否定和连接词 Δ 两类算子. 由于乘积系统是 *SBL* 系统,因此 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 是 $SBL_{\sim}$ 的公理化扩张,满足 $SBL_{\sim}$ 的公理系统及定理 1 和定理 2.

**定义 5**　设 $A=A(p_1,p_2,\cdots,p_m)\in F(S)$,则 $A$ 对应一个 $n$ 值 $m$ 元函数 $\bar{A}$. 在 $\Pi^m_{\sim,\Delta}$ 中,$\bar{A}:\Pi^m_{\sim,\Delta}\to[0,1]$,这里 $\bar{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是由运算符号 ~,Δ,∨,∧,→把 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 连接而成,其方式恰如 $A=A(p_1,p_2,\cdots,p_m)\in F(S)$ 由连接词 ~,Δ,∨,∧,→将原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 连接而成那样,称 $\bar{A}$ 是公式 $A$ 所诱导的函数.

**定义 6**[4] 设 $N=(1,2,\cdots)$，$D=(d_1,d_2,\cdots)$，$0<d_i<1(i=1,2,\cdots)$，称 $D$ 为$(0,1)$中的一个随机数列.

**定义 7**[5] 设 $D_0=(d_{01},d_{02},\cdots)$，$D_{\frac{1}{n-1}}=(d_{\frac{1}{n-1}1},d_{\frac{1}{n-1}2},\cdots)$，$\cdots$，$D_{\frac{n-2}{n-1}}=(d_{\frac{n-2}{n-1}1},d_{\frac{n-2}{n-1}2},\cdots)$，$D_1=(d_{11},d_{12},\cdots)(n\geqslant 2)$为$(0,1)$中的 $n$ 个随机数列，且 $d_{0j}+d_{\frac{1}{n-1}j}+\cdots+d_{\frac{n-2}{n-1}j}+d_{1j}=1(j=1,2,\cdots)$，则称 $D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1$ 为$(0,1)$中的 $n$ 值随机数序.

**定义 8**[5] 设 $D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$为$(0,1)$中的 $n$ 值随机数序. $\forall\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}^m$，令 $\varphi(\alpha)=Q_1\times\cdots\times Q_m$，这里当 $x_j=0$ 时，$Q_j=d_{0j}$；当 $x_j=\frac{i}{n-1}$时，$Q_j=d_{\frac{i}{n-1}j}(i=1,2,\cdots,n-2)$；当 $x_j=1$ 时，$Q_j=d_{1j}(j=1,2,\cdots,m)$，则得映射 $\varphi:\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}^m\to[0,1]$，称 $\varphi$ 为$\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}^m$ 的 $D$-随机化映射.

**命题 1**[5] 设 $\varphi$ 为$\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}^m$ 的 $D$-随机化映射，则

$$\sum\left\{\varphi(\alpha):\alpha\in\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}^m\right\}=1.$$

接下来我们在 $\mathrm{Goguen}_{\sim,\Delta}$命题逻辑系统中，利用赋值集的随机化方法，给出公式在 $k$ 连接词下相对于局部有限理论 $\Gamma$ 的 $\Gamma$-$k$ 随机真度的定义，并讨论 $\Gamma$-$k$ 随机真度的相关性质.

本文中特别约定如下：

(1)在 $\Pi^m_{\sim,\Delta}$中讨论；

(2)$k,\lambda,\rho,\eta$ 任取 $\Delta,\sim$；

(3) $\forall\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}^m=\Pi^m_{\sim,\Delta}$；

(4)基本语法、语义概念如定理、逻辑等价、重言式、矛盾式等均与经典命题逻辑一样.

设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，本文规定 $S_\Gamma=\{p\in S\mid\exists B\in\Gamma,p$ 是构成 $B$ 的原子命题$\}$，$S_A=\{p\in S\mid p$ 在 $A$ 中出现$\}$，当 $S_\Gamma$ 有限时，称 $\Gamma$ 为 $\mathrm{Goguen}_{\sim,\Delta}$命题逻辑系统的局部有限理论.

**定义 9** 在 $\Pi^m_{\sim,\Delta}$中，设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$A\in F(S)$，$S=S_\Gamma\cup S_A=\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$为$(0,1)$中的 $n$ 值随机数序，令

$$[kA]_t=\overline{kA}^{-1}(t),$$

$$\mu([kA]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in N(\Gamma),\alpha\in\overline{kA}^{-1}(t)\}$$

$$\tau_{D,\Gamma}(kA)=\begin{cases}1 & ,N(\Gamma)=\varnothing\\ \frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum\limits_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([kA]_t) & ,N(\Gamma)\neq\varnothing\end{cases}$$

其中，$N(\Gamma)=\{\alpha\in\Pi^m_{\sim,\Delta}\mid\forall B\in\Gamma,\bar{B}(\alpha)=1\}$，称 $\tau_{D,\Gamma}(kA)$为公式 $A$ 在 $k$ 连接词下相对于局部有限理论 $\Gamma$ 的 $\Gamma$-$k$ 随机真度，简称 $\Gamma$-$k$ 随机真度.

**注 2** 由于文献[4,5]中提出的随机真度是真度概念的推广. 文献[5]中提出的 $\Gamma$-真度也是真度概念的推广. 那么 $\Gamma$-$k$ 随机真度自然是随机真度与 $\Gamma$-真度概念的推广.

**定理 3** 设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$为$(0,1)$中的 $n$ 值随机数序，

(ⅰ) 若$\models\lambda A\to\rho B$，则 $\tau_{D,\Gamma}(\lambda A)\leqslant\tau_{D,\Gamma}(\rho B)$；

(ⅱ) 若 $\lambda A\approx\rho B$，则 $\tau_{D,\Gamma}(\lambda A)=\tau_{D,\Gamma}(\rho B)$；

(ⅲ) 若 $N(\Gamma)\neq\varnothing$，则 $\tau_{D,\Gamma}(\sim kA)=1-\tau_{D,\Gamma}(kA)$.

**证明** 设 $A$，$B$ 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，$\forall(\alpha)\in N(\Gamma)$，

(ⅰ) 若$\models\lambda A\to\rho B$，则$(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})(\alpha)=1$，$\lambda\bar{A}(\alpha)\to\rho\bar{B}(\alpha)=1$. 从而 $\lambda\bar{A}(\alpha)\leqslant\rho\bar{B}(\alpha)$.

又因为 $\mu([\lambda A]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overline{\lambda A}^{-1}(t)\}$，$\mu([\rho B]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overline{\rho B}^{-1}(t)\}$，

所以 $\sum\limits_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A]_t)\leqslant\sum\limits_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\rho B]_t)$.

因此$\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum\limits_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A]_t)\leqslant\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum\limits_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\rho B]_t)$.

由定义 9 得，$\tau_{D,\Gamma}(\lambda A)\leqslant\tau_{D,\Gamma}(\rho B)$.

(ⅱ) 若 $\lambda A\approx\rho B$，则 $\lambda\bar{A}(\alpha)=\rho\bar{B}(\alpha)$.

又因为$\mu([\lambda A]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overline{\lambda A}^{-1}(t)\}$，

$\mu([\rho B]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overline{\rho B}^{-1}(t)\}$，

所以 $\sum\limits_{\alpha\in N(),t\in[0,1]}\mu([\lambda A]_t)=\sum\limits_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\rho B]_t)$.

因此

$$\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A]_t)=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\rho B]_t).$$

由定义 9 得，$\tau_{D,\Gamma}(\lambda A)=\tau_{D,\Gamma}(\rho B)$.

(ⅲ) 若 $N(\Gamma)\neq\varnothing$，则

$$\begin{aligned}\tau_{D,\Gamma}(\sim kA)&=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\sim kA]_t)\\&=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}(1-\mu([kA]_t))\\&=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}1-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]} \mu([kA]_t)$$
$$=1-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]} \mu([kA]_t)$$
$$=1-\tau_{D,\Gamma}(kA).$$

**引理 1**　设 $\forall a,b\in\Pi_{\sim,\Delta}$，则 $\lambda a\vee\rho b=\lambda a+\rho b-(\lambda a\wedge\rho b)$.

**证明**　令 $*_1=(\lambda a\vee\rho b)-\lambda a-\rho b+(\lambda a\wedge\rho b)$，分两种情况进行讨论:

(1)当 $\lambda a\geqslant\rho b$ 时，$*_1=\lambda a-\lambda a-\rho b+\rho b=0$;

(2)当 $\lambda a<\rho b$ 时，$*_1=\rho b-\lambda a-\rho b+\lambda a=0$.

**定理 4**　设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A,B\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant2)$为(0,1)中的 $n$ 值随机数序，则
$\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\vee\rho B)=\tau_{D,\Gamma}(\lambda A)+\tau_{D,\Gamma}(\rho B)-\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\wedge\rho B)$.

**证明**　设 $A,B$ 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，$\forall(\alpha)\in N(\Gamma)$，
由引理 1 知，
$\lambda\bar{A}(\alpha)\vee\rho\bar{B}(\alpha)=\lambda\bar{A}(\alpha)+\rho\bar{B}(\alpha)-(\lambda\bar{A}(\alpha)\wedge\rho\bar{B}(\alpha))$，
其中　$\lambda\bar{A}(\alpha)\vee\rho\bar{B}(\alpha)=(\lambda\bar{A}\vee\rho\bar{B})(\alpha)$，
$\lambda\bar{A}(\alpha)\wedge\rho\bar{B}(\alpha)=(\lambda\bar{A}\wedge\rho\bar{B})(\alpha)$，
那么$(\lambda\bar{A}\vee\rho\bar{B})(\alpha)=\lambda\bar{A}(\alpha)+\rho\bar{B}(\alpha)-(\lambda\bar{A}\wedge\rho\bar{B})(\alpha)$.
又因为

$$\mu([\lambda A\vee\rho B]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in(\lambda\bar{A}\vee\rho\bar{B})^{-1}(t)\},$$
$$\mu([\lambda A]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overline{\lambda A}^{-1}(t)\},$$
$$\mu([\rho B]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overline{\rho B}^{-1}(t)\},$$
$$\mu([\lambda A\wedge\rho B]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in(\lambda\bar{A}\wedge\rho\bar{B})^{-1}(t)\},$$

所以

$$\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A\vee\rho B]_t)=\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A]_t)+\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\rho B]_t)-\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A\wedge\rho B]_t).$$

因此

$$\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A\vee\rho B]_t)$$
$$=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A]_t)+\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\rho B]_t)-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A\wedge\rho B]_t).$$

由定义 9 得，
$\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\vee\rho B)=\tau_{D,\Gamma}(\lambda A)+\tau_{D,\Gamma}(\rho B)-\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\wedge\rho B)$.

**引理 2**　设$\forall a,b\in\Pi_{\sim,\Delta}$，则$\rho b\geqslant\lambda a+(\lambda a\to\rho b)-1$.

**证明**　令 $*_2=\rho b-\lambda a-(\lambda a\to\rho b)+1$，分以下两种情况进行讨论:

(1)当 $\lambda a\leqslant\rho b$ 时，$*_2=\rho b-\lambda a\geqslant0$;

(2)当 $\lambda a>\rho b$ 时，

$$*_2=\rho b-\lambda a-\frac{\rho b}{\lambda a}+1=\frac{\rho b(\lambda a-1)}{\lambda a}-\frac{\lambda a(\lambda a-1)}{\lambda a}$$
$$=\frac{(\rho b-\lambda a)(\lambda a-1)}{\lambda a}\geqslant0.$$

综上，得 $\rho b\geqslant\lambda a+(\lambda a\to\rho b)-1$.

**定理 5**(Γ－$k$ 真度的 *MP* 规则)　设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A,B\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant2)$为(0,1)中的 $n$ 值随机数序，若 $\tau_{D,\Gamma}(\lambda A)\geqslant\alpha$，$\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)\geqslant\beta$，则 $\tau_{D,\Gamma}(\rho B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

**证明**　设 $A$，$B$ 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，$\forall(\alpha)\in N(\Gamma)$，
由引理 2 知，$\rho\bar{B}(\alpha)\geqslant\lambda\bar{A}(\alpha)+(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})(\alpha)-1$，
因为

$$\mu([\lambda A]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overline{\lambda A}^{-1}(t)\},$$
$$\mu([\rho B]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in\overline{\rho B}^{-1}(t)\},$$
$$\mu([\lambda A\to\rho B]_t)=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})^{-1}(t)\},$$

所以

$$\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\rho B]_t)\geqslant\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A]_t)+\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A\to\rho B]_t)-\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}1.$$

因此

$$\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\rho B]_t)\geqslant\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A]_t)+\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([\lambda A\to\rho B]_t)-\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}1.$$

结合定义 9 得，$\tau_{D,\Gamma}(\rho B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

**定理 6**(Γ-$k$ 真度的 *HS* 规则)　设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A,B,C\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant2)$为(0,1)中的 $n$ 值随机数序，若 $\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)\geqslant\alpha$，$\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\eta C)\geqslant\beta$，则 $\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\eta C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

**证明**　设 $A,B,C$ 含有相同的原子公式，易知 $\forall a,b,c\in\Pi_{\sim,\Delta}$，有$(\lambda a\to\rho b)\to((\rho b\to\eta c)\to(\lambda a\to\eta c))=1$，所以$(\lambda A\to\rho B)\to((\rho B\to\eta C)\to(\lambda A\to\eta C))$是重言式.
由定理 3(ⅰ)和定理 5 知，
$\tau_{D,\Gamma}((\rho B\to\eta C)\to(\lambda A\to\eta C))\geqslant\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)\geqslant\alpha$.
则　$\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\eta C)\geqslant\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\eta C)+\tau_{D,\Gamma}((\rho B\to\eta C)\to(\lambda A\to\eta C))-1\geqslant\alpha+\beta-1$.

## 4　Γ-$k$ 随机相似度、Γ-$k$ 随机伪距离的定义及性质

**定义 10**　设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant2)$为(0,1)中的 $n$ 值随机数序，令:

$$\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=\tau_{D,\Gamma}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))$$

称 $\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)$ 为公式 $A,B$ 在 $\lambda,\rho$ 连接词下相对于局部有限理论 $\Gamma$ 的 $\Gamma$-$k$ 随机相似度，简称 $\Gamma$-$k$ 随机相似度.

**定理 7** 设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序，则 $\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)+\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A)-1$.

**证明** 设 $A,B$ 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，由定理 4 和定义 10 知，

$$\begin{aligned}\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)&=\tau_{D,\Gamma}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))\\&=\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)+\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A)\\&\quad-\tau_{D,\Gamma}((\lambda A\to\rho B)\vee(\rho B\to\lambda A))\\&=\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)+\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A)-1.\end{aligned}$$

**定理 8** 设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序，则

（ⅰ）$\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=\xi_{D,\Gamma}(\rho B,\lambda A)$；

（ⅱ）$\xi_{D,\Gamma}(\lambda A\vee\rho B,\lambda A)=\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A)$；

（ⅲ）$\xi_{D,\Gamma}(\lambda A\wedge\rho B,\lambda A)=\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)$.

**证明** 设 $A,B$ 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，$\forall(\alpha)\in N(\Gamma)$，

（ⅰ）$\forall a,b\in\Pi^m_{\sim,\Delta}$，显然有

$$(\lambda a\to\rho b)\wedge(\rho b\to\lambda a)=(\rho b\to\lambda a)\wedge(\lambda a\to\rho b).$$

所以

$$(\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A)=(\rho B\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\rho B).$$

从而

$$\begin{aligned}&((\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})\wedge(\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A}))(\alpha)\\&=((\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A})\wedge(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B}))(\alpha).\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\mu([(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})\wedge(\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A})]_t)\\&=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in((\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})\wedge(\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A}))^{-1}(t)\},\\&\mu([(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})\wedge(\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A})]_t)\\&=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in((\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})\wedge(\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A}))^{-1}(t)\}.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}((\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})\wedge(\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A}))(\alpha)\\&=\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}((\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A})\wedge(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B}))(\alpha).\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})\wedge(\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A})]_t)\\&=\frac{1}{|N(\Gamma)|}\sum_{\alpha\in N(\Gamma),t\in[0,1]}\mu([(\lambda\bar{A}\to\rho\bar{B})\wedge(\rho\bar{B}\to\lambda\bar{A})]_t).\end{aligned}$$

由定义 9 得，

$$\begin{aligned}&\tau_{D,\Gamma}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))\\&=\tau_{D,\Gamma}((\rho B\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\rho B)).\end{aligned}$$

因此 $\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=\xi_{D,\Gamma}(\rho B,\lambda A)$.

（ⅱ）$\xi_{D,\Gamma}(\lambda A\vee\rho B,\lambda A)$

$$\begin{aligned}&=\tau_{D,\Gamma}(((\lambda A\vee\rho B)\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to(\lambda A\vee\rho B)))\\&=\tau_{D,\Gamma}(((\lambda A\to\lambda A)\wedge(\rho B\to\lambda A))\wedge((\lambda A\to\lambda A)\vee(\lambda A\to\rho B)))\\&=\tau_{D,\Gamma}((\rho B\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\lambda A))\\&=\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A).\end{aligned}$$

（ⅲ）$\xi_{D,\Gamma}(\lambda A\wedge\rho B,\lambda A)$

$$\begin{aligned}&=\tau_{D,\Gamma}(((\lambda A\wedge\rho B)\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to(\lambda A\wedge\rho B)))\\&=\tau_{D,\Gamma}(((\lambda A\to\lambda A)\vee(\rho B\to\lambda A))\wedge((\lambda A\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\rho B)))\\&=\tau_{D,\Gamma}((\lambda A\to\lambda A)\wedge(\lambda A\to\rho B))\\&=\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B).\end{aligned}$$

**定义 11** 设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序，规定 $\rho_{D,\Gamma}:F(S)\times F(S)\to[0,1]$，则：

$$\rho_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=1-\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)$$

称 $\rho_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)$ 为公式 $A,B$ 在 $\lambda,\rho$ 连接词下相对于局部有限理论 $\Gamma$ 的 $\Gamma$-$k$ 随机伪距离，简称 $\Gamma$-$k$ 随机伪距离，$(F(S),\rho_{D,\Gamma})$ 称为 $\Gamma$-$k$ 随机逻辑度量空间.

**定理 9** 设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序，则 $\rho_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=1-\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)+1-\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A)$. **证明** 由定理 7 知，

$$\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)+\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A)-1,$$

则

$$1-\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=1-(\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)+\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A)-1).$$

得

$$\rho_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=1-\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)+1-\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A).$$

**定理 10** 设 $\Gamma\subseteq F(S)$，$A\in F(S)$，$S_\Gamma$ 有限，$D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序，则

（ⅰ）$\rho_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=\rho_{D,\Gamma}(\rho B,\lambda A)$；

（ⅱ）$\rho_{D,\Gamma}(\lambda A\vee\rho B,\lambda A)=1-\tau_{D,\Gamma}(\rho B\to\lambda A)$；

（ⅲ）$\rho_{D,\Gamma}(\lambda A\wedge\rho B,\lambda A)=1-\tau_{D,\Gamma}(\lambda A\to\rho B)$.

**证明** 在此只证明（ⅰ），其它同理可证. 设 $A,B$ 含有相同的原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，由定理 8（ⅰ）知，因为 $\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=\xi_{D,\Gamma}(\rho B,\lambda A)$，所以 $\rho_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=1-\xi_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)=1-\xi_{D,\Gamma}(\rho B,\lambda A)=\rho_{D,\Gamma}(\rho B,\lambda A)$.

## 5 理论 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 的随机发散度与随机相容度

**定义 12** 设 $\Gamma\subseteq F(S)$，令

$$div_{D,\Gamma}(\Gamma)=\sup\{\rho_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)\mid\lambda A,\rho B\in D(\Gamma)\},$$

称 $div_{D,\Gamma}(\Gamma)$ 为理论 $\Gamma$ 的随机发散度. 当 $div_{D,\Gamma}(\Gamma)=1$ 时，称 $\Gamma$ 是随机全发散的理论.

**定义 13** 设 $\Gamma_0\subseteq F(S)$，$S_{\Gamma_0}$ 有限，$\forall\Gamma\subseteq F(S)$，$D_0$，

$D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序,令

$$div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=\sup\{\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)\mid\lambda A,\rho B\in D_{\Gamma_0}(\Gamma)\}$$

称 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)$ 为理论 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 的随机发散度. 当 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=1$ 时,称理论 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 是随机全发散的. 显然 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=\sup\{\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)\mid\lambda A,\rho B\in D(\Gamma\cup\Gamma_0)\}$.

**定理 11**　设 $\Gamma_0\subseteq F(S)$, $S_{\Gamma_0}$ 有限, $\forall\Gamma\subseteq F(S)$, $D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序,则

(ⅰ) $0\leqslant div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)\leqslant 1$;

(ⅱ) 若 $\Gamma_0=\phi$ 或 $\Gamma_0$ 为定理集,则 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=div_{D,\Gamma}(\Gamma)$;

(ⅲ) 若 $\bar{0}\in D(\Gamma_0)$,则 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=0$.

**证明**

(ⅰ) 显然.

(ⅱ) 若 $\Gamma_0=\varnothing$ 或 $\Gamma_0$ 为定理集,则 $D(\Gamma_0\cup\Gamma)=D(\Gamma)$,故 $\forall\lambda A,\rho B\in D_{\Gamma_0}(\Gamma)$. 由定义 11 可得 $\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\mu B)=1-\tau_{D,\Gamma_0}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))=1-\tau_{D,\Gamma}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))=\rho_{D,\Gamma}(\lambda A,\rho B)$. 从而 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=div_{D,\Gamma}(\Gamma)$.

(ⅲ) 若 $\bar{0}\in D(\Gamma_0)$,由定义 13 得 $\forall\lambda A,\rho B\in D_{D,\Gamma_0}(\Gamma)$, $\tau_{D,\Gamma_0}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))=1$.
即

$$\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)=1-\tau_{D,\Gamma_0}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))=0.$$

从而 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=0$.

**定义 14**　设 $\Gamma,\Gamma_0\subseteq F(S)$, $D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序. 若 $\bar{0}\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$,且 $N(\Gamma)\neq\varnothing$,则称理论 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 不随机相容. 否则,称理论 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 随机相容.

特别地,若 $\Gamma\subseteq D(\Gamma_0)$ 理论 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 完全随机相容.

**定理 12**　设 $\Gamma_0\subseteq F(S)$, $S_{\Gamma_0}$ 有限, $\forall\Gamma\subseteq F(S)$, $D_0,D_{\frac{1}{n-1}},\cdots,D_{\frac{n-2}{n-1}},D_1(n\geqslant 2)$ 为 $(0,1)$ 中的 $n$ 值随机数序,

(ⅰ) $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 完全随机相容当且仅当 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=0$;

(ⅱ) $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 不随机相容当且仅当 $\exists\lambda A,\rho B\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$, s. t. $\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)=1$;

(ⅲ) $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 随机相容当且仅当 $\forall\lambda A,\rho B\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$, s. t. $\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)<1$.

**证明**　(ⅰ) 必要性:若 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 完全随机相容,则 $\Gamma\subseteq D(\Gamma_0)$, $D(\Gamma_0\cup\Gamma)=D(\Gamma_0)$. 从而 $\forall\lambda A,\rho B\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$,有 $\lambda A,\rho B\in D(\Gamma_0)$,则 $\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)=1-\tau_{D,\Gamma_0}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))=0$. 结合定义 13 可得 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=0$.

充分性:若 $div_{D,\Gamma_0}(\Gamma)=0$,由定义 13 知 $\lambda A\in\Gamma$, $\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,T)=0$ ($T$ 是 $\Pi_{\sim,\Delta}$ 中的定理). 显然 $\lambda A\approx((\lambda A\to T)\wedge(T\to\lambda A))$. 由定理 3(ⅱ) 知 $\tau_{D,\Gamma_0}(\lambda A)=\tau_{D,\Gamma_0}((\lambda A\to T)\wedge(T\to\lambda A))=1-\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,T)=1$. 则 $\lambda A\in D(\Gamma_0)$. 因此 $\Gamma\subseteq D(\Gamma_0)$,即 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 完全随机相容.

(ⅱ) 必要性:若 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 不随机相容,则 $\bar{0}\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$,且 $N(\Gamma)\neq\varnothing$. 由 $N(\Gamma)\neq\varnothing$ 及定义 9 可知 $\tau_{D,\Gamma_0}(\bar{0})=0$. 显然 $(\bar{0}\to T)\wedge(T\to\bar{0})\approx\bar{0}$. 由定理 3(ⅱ) 可知, $\tau_{D,\Gamma_0}((\bar{0}\to T)\wedge(T\to\bar{0}))=\tau_{D,\Gamma_0}(\bar{0})=0$. 因此在 $D(\Gamma_0\cup\Gamma)$ 中存在 $\bar{0}$, $T$ 使得 $\rho_{D,\Gamma_0}(\bar{0},T)=1-\tau_{D,\Gamma_0}((\bar{0}\to T)\wedge(T\to\bar{0}))=1$.

充分性:若 $\exists\lambda A,\rho B\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$, s. t. $\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)=1$,则 $\tau_{D,\Gamma_0}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))=1-\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)=0$. 由定义 14 可知 $N(\Gamma)\neq\varnothing$.

下面证明 $\bar{0}\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$,

一方面,由 $\lambda A,\rho B\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$,及 $\vdash\lambda A\to(\rho B\to\lambda A)$, $\vdash\rho B\to(\lambda A\to\rho B)$,利用 MP 规则可得 $\Gamma_0\cup\Gamma\vdash(\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A)$.

另一方面,由定理 3(ⅲ) 可得,

$$\begin{aligned}&\tau_{D,\Gamma_0}(\sim((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A)))\\&=1-\tau_{D,\Gamma_0}((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))\\&=\rho_{D,\Gamma_0}(\lambda A,\rho B)\\&=1.\end{aligned}$$

因此 $\Gamma_0\cup\Gamma\vdash\ \sim((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))$,

再对 $\vdash((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))\to$

$(\sim((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A)))$.

利用 MP 规则得

$$\Gamma_0\cup\Gamma\vdash((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))\wedge(\sim((\lambda A\to\rho B))(\rho B\to\lambda A))).$$

由于

$$((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A))\wedge(\sim((\lambda A\to\rho B)\wedge(\rho B\to\lambda A)))\approx 0.$$

所以 $\Gamma_0\cup\Gamma\vdash\bar{0}$,即 $\bar{0}\in D(\Gamma_0\cup\Gamma)$. 因此 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 不随机相容.

(ⅲ) 利用(ⅱ)中结论可以证明.

## 6　结论

本文以 Goguen$_{\sim,\Delta}$ 系统为例,利用赋值集的随机化方法给出了公式相对于局部有限理论 $\Gamma$ 的 $\Gamma$-$k$ 随机真度,从而实现了 SBL 公理化扩张的计量化. $\Gamma$-$k$ 随机真度作为随机真度以及 $\Gamma$ 真度的推广,由于其中增加了去模糊化算子 $\Delta$,因此在模糊推理中具有更重要的意义. 本文相继还提出 $\Gamma$-$k$ 随机相似度, $\Gamma$-$k$ 随机伪距离的定义并讨论了其性质,并在 Goguen$_{\sim,\Delta}$ 系统中介绍了任意理论 $\Gamma$ 相对于特定理论 $\Gamma_0$ 的相对随机发散度和相对随机相容度,以及相对随机发散度与相对随机相容度之间的关系式. 这些性质为 SBL 公理化扩张系统的计

量化模糊推理打下了基础. Goguen$_{\sim,\Delta}$系统中近似推理部分的讨论,我们将于另文中展开论述.

## 参考文献


[1] Pavelka J. On fuzzy logic(Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ)[J]. Zeitschrf Math Logik und Grundlagender Math,1979,25:45 – 52;119 – 134;447 – 464.

[2] 王国俊. 计量逻辑学(Ⅰ)[J]. 工程数学学报,2006,23(2):191 – 215.
Wang Guo-Jun. Quantitative logic(Ⅰ)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics,2006,23(2):191 – 215.(in Chinese)

[3] 吴洪博,周建仁. 命题逻辑系统 $R_0$ $L_{3n+1}$ 中公式的 Γ-真度及性质[J]. 计算机学报,2015,38(8):1672 – 1679.
Wu Hong-Bo,Zhou Jian-Ren. The Γ-truth degree of formulas in propositional logic system $R_0$ $L_{3n+1}$ with properties [J]. Chinese Journal of Computers,2015,38(8):1672 – 1679.(in Chinese)

[4] 惠小静,王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用[J]. 中国科学:E 辑,2007,37(6):801 – 812.
Hui Xiao-Jing,Wang Guo-Jun. Randomization of classical inference patterns and its application[J]. Science in China (Series E),2007,37(6):801 – 812.(in Chinese)

[5] 崔美华. *n* 值 Lukasiewicz 命题逻辑系统中公式的随机真度及近似推理[J]. 应用数学学报,2012,35(2):209 – 220.
Cui Mei-Hua. The randomized truth degree of formulas and approximate reasoning in *n*-valued Lukasiewicz propositional logic system[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics,2012,35(2):209 – 220.(in Chinese)

[6] Esteva F,Godo L,Hájek P,et al. Residuated fuzzy logics with an involutive negation[J]. Arch Math Logic,2000,39:103 – 124.

[7] Flaminio T,Marchioni E. T-norm based logics with an independent an involutive negation[J]. Fuzzy Set Syst,2006,157:3125 – 3144.

[8] Baaz M. Infinite-valued Gødel logic with 0-1 projections and relativisations[J]. Comput Sci Phys Lect Notes Logic,1996,6:23 – 33.

[9] Cintula P,Klement E P,Mesiar R,et al. Fuzzy logics with an additional involutive negation[J]. Fuzzy Set Syst,2010,161:390 – 411.

[10] 惠小静. 基于真值的 SBL$_\sim$ 公理化扩张系统的计量化[J]. 中国科学:信息科学,2014,44(7):900 – 911.
Hui Xiao-Jing. Quantified axiomatic extension systems of SBL$_\sim$ based on truth value[J]. Science in China:Information Science,2014,44(7):900 – 911.(in Chinese)


## 作者简介


**惠小静(通信作者)** 女,1973 年出生,陕西延安人. 现为延安大学数学与计算机科学学院教授,研究方向为不确定性推理.
E-mail:xhmxiaojing@163.com

**高晓莉** 女,1992 年出生,陕西延安人. 现为延安大学数学与计算机科学学院在读研究生,研究方向为数理逻辑与不确定性推理.
E-mail:951402445@qq.com

**朱乃调** 女,1990 年出生,陕西米脂人. 现为延安大学数学与计算机科学学院在读研究生,研究方向为数理逻辑与不确定性推理.
E-mail:792266404@qq.com